



TITLE:

異方性大氣及び海洋(地表風に就いて, 第2報)

AUTHOR(S):

野満, 隆治

CITATION:

野満, 隆治. 異方性大氣及び海洋(地表風に就いて, 第2報). 地球物理
1943, 6(2): 95-109

ISSUE DATE:

1943-08-25

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/178301>

RIGHT:

異方性大氣及び海洋*

(地表風に就いて, 第2報)

理學博士 野 滿 隆 治

緒 言

Taylor⁽¹⁾ が Guldberg 及び Mohn⁽²⁾ の式を改めて, 地上の風 W_0 と地衡風 (Gradient wind) W_g との間には其の交角を α とすれば,

$$W_0/W_g = \cos \alpha - \sin \alpha$$

なる関係が存在すべきことを提唱して以來, 果して然るや否やの議論が盛んに行はれたが實際は中々さうなつて居ない。それで之が改良につき Brunt⁽³⁾, 石丸⁽⁴⁾, 高谷⁽⁵⁾, 榊原⁽⁶⁾, 西村⁽⁷⁾, 櫻庭⁽⁸⁾, 淵諸氏⁽⁹⁾の研究があるが, 私⁽¹⁰⁾も先年廣島に於ける日本學術協會で「地表風に就いて」と題し, 地上の風 W_0 に限らず一般に任意の高さ z に於ける風 W_z に對し

$$W_z/W_g = \cos \alpha - \tan \beta \sin \alpha \quad (1)$$

但し β = 體抵抗 (Body resistance) が風の逆方向に對し左廻りに成す角

なる式が成立すべきことを述べ, 地上の β が Taylor の場合の如く 45° にならない一原因として有限大氣なる觀念を導入して見た。然しそれでは $\beta < 45^\circ$ になる一つの理由としては相當有力なることを感ずるけれども, $\beta > 45^\circ$ になる場合の説明には殆んど無効であつ

* 本文は昭和11年3月東京に於て日本數學物理學會總會席上に講演した。抄録は日本數學物理學會誌10(1936), 191にある。著者は其の後溫泉火山の研究に没頭せねばならぬ立場にあつたので, 本文の印刷を失念してしまつた。今漸く夫を思ひ出し, 當時の原稿そのまま印刷に附する次第である。

- (1) G. I. Taylor: Eddy motion in the atmosphere. Phil. Trans. R. S. London **215** (1925), 1.
- (2) Guldberg & Mohn: Etudes sur les mouvements de l'atmosphère (Christiania 1816). Abbe, Mechanics, p. 122.
- (3) D. Brunt: Internal friction in the atmosphere. Q. J. Roy. Met. Soc. **46** (1920), 175.
- (4) Y. Isimaru: On the motion of air near the earth's surface. Geoph. Mag. Tokyo. 1928.
- (5) S. Takaya: On the coefficient of eddy viscosity in the lower atmosphere. Mem. Imp. Mar. Obs. Kobe, **4** (1930).
- (6) S. Sakakibara: Further note on the existence of the transverse eddy resistance. Proc. Physico-math. Soc. Japan. **12** (1930).
- (7) 西村傳三: 大氣の運動に就て. 氣象輯誌第2輯 **10** (1932).
- (8) 櫻庭信一: 大氣の擾動に就いて. 同上 **11** (1933), 357.
- (9) 淵秀隆: 大氣の運動に及ぼす地面摩擦の影響. 同上 **12** (1934), 606.
- (10) 野滿隆治: 地表風に就いて. 日本學術協會報告 **9** (1934), 21.

た。それで今回は別の立場から考究を進めることにした。蓋し β が必ずしも 45° にならないといふことは諸學者の注目的で、或は粘性係数が地上よりの高度によつて變ることに歸したり、或は特殊の側方抵抗を假定したり、種々の考案が發表されて居るが、私は寧ろ粘性係数が方向によつて違ふ異方性に歸するを最も妥當と信ずるものである。

風の體抵抗偏角問題は又深海に於ける吹送流の表面偏角問題と全く換を一にする。Ekman の有名な吹送海流論では、深海に於ける表面海流の風向に對する偏角は 45° となるのであるが、實際はそれより大きいもの小さいもの種々あるので、學者の興味を惹いて居る。従つて今茲に論ぜんとする異方性大氣論は、直ちに取つて異方性海洋論とし、海流偏角問題に利用出来る。仍つて序にそれにも論及する積りである。

I. 一般化されたるテラー關係式の一般的證明

著者は前論文に於て、粘性係数 μ が異方性でない限り如何なる法則に従ふとも、例へば前掲諸家の採用せるあらゆる事情下にあつても、(1)式の成立すべきことを極めて簡単に、運動方程式のみからそれを解くまでもなく、證明し得らるゝことを示した。

然し本論文では μ が方向によつて違ふ異方性大氣を取扱はうとするので、上記の證明法はすぐには使へない。又榊原氏の假定した様な側方抵抗の場合にも使へない。ところが、(1)式は左様な場合にも成立するものであつて、空氣抵抗が如何なる法則に従ひ如何なる性質のものであつても、單なる運動方程式のみから容易に證明し得らるるのである。仍つて筆者は先づ其の最も一般的な證明を掲げる。

所謂體抵抗 (Frictional body force), 換言すれば空氣の單位體積毎に働く周圍よりの抵抗力を R とし、水平の二方向 x, y に分解したる分抵抗を R_x, R_y としよう。風が水平で座標軸方向の分速を u, v , 地衡風を W_g とし氣壓傾度 G が y 方向にある様に座標軸を取れば、定常狀態の運動方程式は

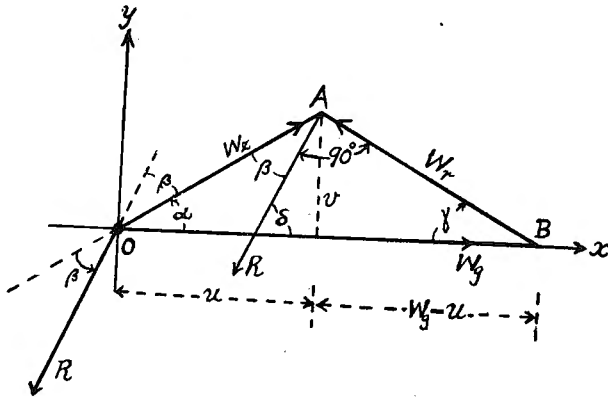
$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 = R_x + \lambda v \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= 0 = R_y - \lambda (u - W_g) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

茲に λ と W_g とは、懸案地點の緯度を φ , 地球自轉角速度を ω , 空氣の密度を ρ , 壓力を p とすれば,

$$\lambda \equiv 2\rho\omega \sin \varphi, \quad W_g \equiv G/\lambda = -\frac{1}{2\rho\omega \sin \varphi} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

と置いたものである。

第1圖 體抵抗の方向決定法



第1圖に於て、任意の高度に於ける風速を $OA=W_z$ 、地衡風を $OB=W_g$ とすれば、 $BA=W_r$ は兩者の間の相對速度を表はす。 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を圖示の如き角とすれば

$$\tan \delta = \frac{R_y}{R_z}, \quad \cot \gamma = \frac{W_g - u}{v}$$

然るに、此の兩式の右邊は運動方程式(2)によつて相等しいから

$$\tan \delta = \cot \gamma \quad \therefore \delta + \gamma = 90^\circ$$

で、 R は $W_r=BA$ に直角である。

又素より $\alpha + \beta = \delta$ に注意して、 $\triangle OAB$ の正弦比例を作つて、 W_z/W_g を求むれば

$$\frac{W_z}{W_g} = \frac{\sin \gamma}{\sin (90^\circ + \beta)} = \frac{\cos \delta}{\cos \beta} = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \beta} = \cos \alpha - \tan \beta \sin \alpha \quad (1)$$

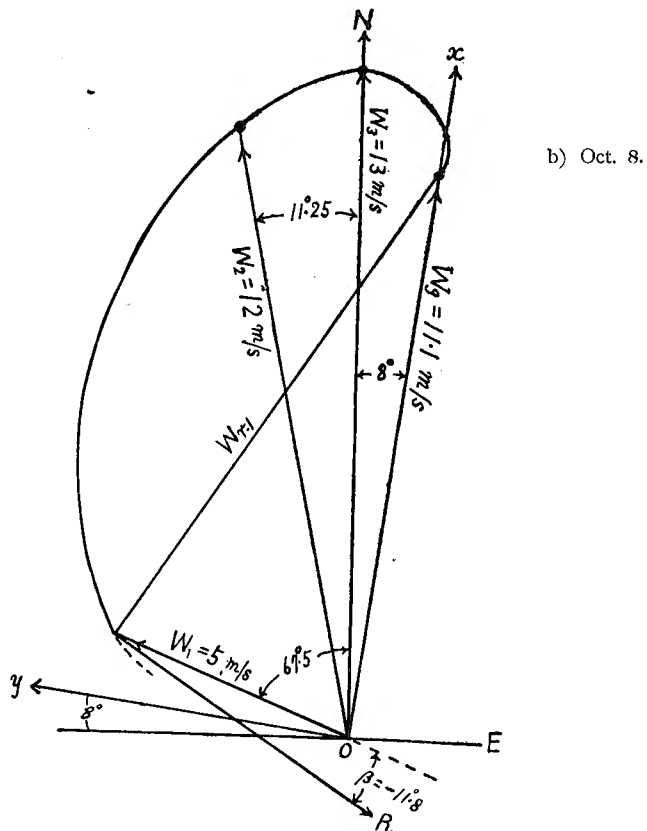
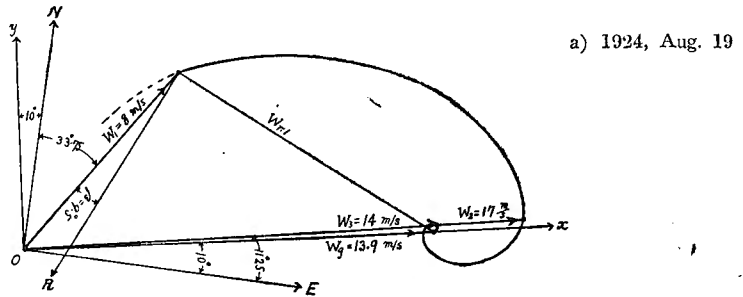
即ち、一般化されたるテラー關係式が得られるのである。

以上の證明法には何等體抵抗の法則や性質には觸れて居ない。従つて(1)式は如何なる場合も成立すべきことが明瞭である。例へば Guldberg と Mohn の場合には $\beta=0$ 、Taylor の場合には $\beta=45^\circ$ 、其の他諸家の假定した様な粘性係數では夫れ夫れに應じた β の値をとるが、何れも(1)式に包含されることには變りない。

序ながら面摩擦換言すれば空氣中の任意斷面に於て其の兩側の空氣層が作用し合ふ摩擦力は、普通考へられる様な等方性大氣中では、兩者の相對速度に正反對の方向をとるべきことは云ふまでもない。然るに體抵抗は地面でさへも風向の逆方向ではなくて、相當の角を形成するのであるから、諸家の興味を惹き議論の種となつたわけと思はれる。

兎も角(1)式は抵抗の法則には無關係に成立つから、實測の風速分布より第1圖の様な W_z, W_g, W_r のベクトルを描き、 W_r に直角なる線と W_z との交角を測つて容易に實際の β を求め得る。従つて其の實測 β が前掲諸家の孰れの假定に最も良く適合するかを検

討すれば、之によつて如何なる抵抗法則乃至は粘性係数の性質に關し誰の假定が最も妥當なるか判斷せらるゝわけである。此の様な考への下に、筆者は⁽¹¹⁾榊原氏の論文にあるLindenbergの觀測を使つて、 β を求めたところ第1表の様になつた。第2圖は其の處理の仕方を示した例である。

第2圖 Lindenberg に於ける観測値より β 判定の例

(11) 前出(6)

異方性大氣及び海洋

此の表を見ると、 β は 45° の日は殆んどなく或はそれより大きく或は小さいが、 45° より

第1表 Lindenberg に於ける β の實測値(地上 130m に於て)

| 年月日 | 1923-XII | | | 1924-I | | | II | | | | III | | IV | | | V | | |
|---------|----------|-------|-------|--------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|-------|-----|
| | 5 | 8 | 23 | 10 | 12 | 20 | 2 | 5 | 16 | 21 | 4 | 23 | 2 | 17 | 21 | 17 | 24 | 29 |
| β | 14.5 | -21.0 | -10.5 | -3.0 | 9.5 | 26.0 | 23.0 | 40.0 | 34.0 | 20.5 | 18.7 | 14.5 | 33.5 | 14.0 | 21.0 | 8.5 | -10.4 | 4.0 |

| 年月日 | VI | | VII | | | VIII | | | IX | | | | X | | | | XI | | | |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|------|------|-------|------|------|-------|------|-------|-------|
| | 3 | 15 | 15 | 19 | 24 | 19 | 20 | 31 | 3 | 16 | 21 | 22 | 3 | 8 | 25 | 31 | 1 | 16 | 25 | 30 |
| β | 45.5 | 26.0 | -7.3 | 40.3 | 21.5 | 9.5 | 27.5 | -24.5 | 17.3 | 20.0 | 12.0 | 16.0 | -6.0 | -11.8 | 39.0 | 24.0 | -15.6 | 17.0 | -14.0 | -11.0 |

小さい日が甚だ多い。のみならず β が負値を取ることも稀ではないのである(第2圖bの如く)。之は極めて注目すべきことで、従來の諸説では到底説明つかない事實である。風成海流の偏角でも 45° とは異なる種々の値をとるのは、Dinklage 氏其の他の偏角分布圖に現はれて居る。兎も角北半球で β が負になることは、粘性係数を等方性とする限り了解が出来ない。只榊原氏の如く體抵抗式を

$$\begin{cases} R_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} + \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ R_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} - \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{cases}$$

とし側抵抗なるものを假定すれば、側抵抗係数 ν の符號如何によつては或は β が負となり得るかも知れない。然し私は榊原氏の假定した様な側抵抗はあり得ぬと信ずる。何故なら氏の運動式を u のみあつて $v=0$ なる場合、例へば風洞内の風とか直流河川の流水とかに適用して見ると、その様な場合でさへも抵抗が流向 x 線上に働くのみならず、之に直角な y 方向にも $-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ だけ働くことになる。それでは風洞や河川の真中に一端固定せる糸につけて物體を放流すれば、流向と若干の角を成して静止せねばならぬことになり、常識に反する。又上下一様な風中の風信器は風向を指示せぬことゝなり、従來の風向測定法を破壊するではあるまいか。

私は此の難點を切り抜け而も實在可能なものとして、粘性係数が方向により異なる所の異方性大氣を考へたい。

II. 異方性大氣中の風

既に Richardson⁽¹¹⁾ が煙の散り方に風向と直角方向との差があることなどによつて指摘した通り、渦粘性係数は同一點に於ても方向により異なる場合がある様である。之は亂流擾動の混合經路 (Mischungsweg) が方向により違へばよいわけで、例へば風の方角と之に直角な方向では渦動の發生に難易があると考ふれば無理な想定ではない。又例へば平板でも一方向に鱗目を立てたものの上では、物體を滑らすのに、どうしても鱗目の方向に偏し易い傾向がある様に、平行な低い丘陵が起伏してゐる平野では、其の上を吹き渡る風がどうしても丘陵脈に平行に近づかんとする傾向があつて然るべきである。つまり丘陵脈を横斷する様な風に對しては當然渦動が強く發生して渦動粘性係数を大ならしむるが、丘陵脈に平行な風に對しては抵抗が比較的小さくてもよい理由がある。つまり渦粘性は方向により違つてもよいわけが色々と考えられるのである。

1. 運動方程式と其の解

それで擾亂テンソルの各分素は異なり得るが、特に今の場合には私は x, y なる水平二方向の空氣體抵抗を

$$R_x = \mu_x \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad R_y = \mu_y \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (4)$$

と置き、粘性係数が μ_x と μ_y の様に違ふ異方性大氣を考へたい。さうすると、氣壓傾度が y 方向に G である場合の定常狀態に於ける風の運動方程式 (2) は

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k_x^2 v, \\ 0 &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2k_y^2 (u - W_g) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但し} \quad k_x &= \sqrt{\frac{\rho \omega \sin \varphi}{\mu_x}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{\rho \omega \sin \varphi}{\mu_y}} \\ W_g &= \frac{G}{2\rho \omega \sin \varphi} = \text{地衡風} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

となる。

(5)式を解く爲に、兩式より v を追ひ出せば

$$0 = \frac{d^4 u}{dz^4} + 4k_x^2 k_y^2 (u - W_g) \quad (7)$$

今

(11) Richardson: Weather Prediction, 1922.

$$\left. \begin{aligned} n &\equiv \frac{k_y}{k_x} = \sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}} \\ k &\equiv \sqrt{k_x k_y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

と置けば, (7)式の一般解は

$$u = W_g + C_1 e^{-kz} \cos(kz + c_1) + C_2 e^{+kz} \cos(kz + c_2) \quad (9)$$

特に無限大氣として $z \rightarrow \infty$ のとき $u \neq \infty$, $v \neq \infty$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} u &= W_g - C e^{-kz} \cos(kz + \epsilon) \\ \text{従つて} \quad v &= -\frac{1}{2k_x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n C e^{-kz} \sin(kz + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

茲に C 及び ϵ は積分常數である。

(10) 式は又

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(W_g - u)^2 + \frac{v^2}{n^2}} &= \sqrt{(W_g - u)^2 + \frac{\mu_y}{\mu_x} v^2} = C e^{-kz} \\ \cot \gamma &= \frac{W_g - u}{v} = \frac{1}{n} \cot(kz + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

茲に γ は地衡風と之に對する相對風速 W_r の間の交角である(第1圖参照)。(11)式は後に述ぶる如く u を推算するに役立つ。

積分常數 C と ϵ とを決定するには二つの條件, 例へば地面の風向 α_0 と風速 W_0 (従つて u_0, v_0) が與へられてもよい。即ち(11)の上の式から

$$\sqrt{(W_g - u_0)^2 + v_0^2 / n^2} = C$$

で, 先づ C を算定する。次に高さ z の風向が x 軸と成す角 α は一般に

$$\tan \alpha = \frac{v}{u} = \frac{n C e^{-kz} \sin(kz + \epsilon)}{W_g - C e^{-kz} \cos(kz + \epsilon)} \quad (12)$$

であるから, 地上 $z=0$ での風向角 α_0 は

$$\tan \alpha_0 = \frac{n C \sin \epsilon}{W_g - C \cos \epsilon} \quad \text{或は} \quad C = \frac{W_g \tan \alpha_0}{\cos \epsilon \tan \alpha_0 + n \sin \epsilon} \quad (12')$$

ϵ は此の式か又は(11)の下の変形した次の式で出す。

$$\cot \epsilon = n(W_g - u_0) / v_0 \quad (13)$$

2. 體抵抗の方向 任意の高さ z に於ける空氣に働く體抵抗が同所の風向の逆方向と成す角を左廻りに β とすれば, 第1圖及び(11)式を参照して

$$\tan(\alpha + \beta) = \cot \gamma = \frac{1}{n} \cot(kz + \epsilon) \quad (14)$$

故に地上では、 $z=0$ と置き

$$n \tan(\alpha_0 + \beta_0) = n \cot \gamma_0 = \cot \epsilon \quad (15)$$

3. 面摩擦の方向 高さ z に於ける単位面積が受くる面摩擦力の $-x$ 軸と成す角を左廻りに α' とすれば

$$\tan \alpha' = \frac{-\mu_y \frac{\partial u}{\partial z}}{-\mu_x \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{1 - \tan(kz + \epsilon)}{n[1 + \tan(kz + \epsilon)]} \quad (16)$$

$$\text{地面では } \tan \alpha'_0 = \frac{1 - \tan \epsilon}{n(1 + \tan \epsilon)} = \frac{\cot \epsilon - 1}{n(\cot \epsilon + 1)} \quad (16')$$

α' と體抵抗の方向 β との関係は、(14) 式を代入して

$$\tan \alpha' = \frac{n \tan(\alpha + \beta) - 1}{n\{n \tan(\alpha + \beta) + 1\}} \quad (17)$$

以上、 n が既知の場合は地面 (或は任意の一高度) に於ける風速と風向を測つただけで、 C と ϵ が定まり、延いては體抵抗の方向角 β 、面抵抗の方向角 α' も決定出来る。然し普通は n も亦未知であるから、(10) 式を實用に供するには更に一段の工夫を要する。筆者は(11)式を高度 z の二つの場合に適用して n を決定することにしたが、それは後節に譲る。

尙こゝに一言附加して置きたいことは(10)式が所謂テラー關係の擴張式を満足することである。例へば、地上 $z=0$ に於て(10)、(12')、(15)式を利用すれば

$$\begin{aligned} W_{z=0} &= |\sqrt{u^2 + v^2}|_{z=0} = |v| \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}|_{z=0} = n C \sin \epsilon \sqrt{1 + \cot^2 \alpha_0} \\ &= n \frac{W_g \tan \alpha_0}{\cot \epsilon \tan \alpha_0 + n} \cdot \frac{1}{\sin \alpha_0} = \frac{W_g}{[\tan(\alpha_0 + \beta_0) \tan \alpha_0 + 1] \cos \alpha_0} \\ &= \frac{W_g}{\cos \alpha_0} \cdot \frac{1 - \tan \alpha_0 \tan \beta_0}{1 + \tan^2 \alpha_0} = W_g \cos \alpha_0 (1 - \tan \alpha_0 \tan \beta_0) \\ &= W_g (\cos \alpha_0 - \tan \beta_0 \sin \alpha_0) \end{aligned}$$

でテラー關係式の擴張式(1)に適合する。

而して此の $\tan \beta_0$ が如何なる數値を取るべきかといふに、(15)と(16')の兩式から

$$\tan(\alpha_0 + \beta_0) = \frac{\tan \alpha_0 + \tan \beta_0}{1 - \tan \alpha_0 \tan \beta_0} = \frac{1 + n \tan \alpha'_0}{n(1 - n \tan \alpha'_0)}$$

$$\therefore (n - n^2 \tan \alpha'_0) \tan \alpha_0 + (n - n^2 \tan \alpha'_0) \tan \beta_0 = 1 + n \tan \alpha'_0 - (1 + n \tan \alpha'_0) \tan \alpha_0 \tan \beta_0$$

之より β_0 を求むれば

$$\tan \beta_0 = \frac{1+n(\tan \alpha_0' - \tan \alpha_0) + n^2 \tan \alpha_0 \tan \alpha_0'}{n - n^2 \tan \alpha_0' + (1+n \tan \alpha_0') \tan \alpha_0} \quad (18)$$

である。

特に $n=1$ 即ち普通取扱はれる等方性大氣では

$$\tan \beta_0 = \frac{1 + \tan \alpha_0' - \tan \alpha_0 + \tan \alpha_0 \tan \alpha_0'}{1 - \tan \alpha_0' + \tan \alpha_0 + \tan \alpha_0' \tan \alpha_0}$$

更に $\alpha_0' = \alpha_0$, 即ち地面抵抗が風速の逆方向に働くならば, 上式は 1 従つて $\beta_0 = 45^\circ$ で全く Taylor の場合に一致する。然し一般には, 次に述ぶる様に必ずしも α_0' は α_0 に等しくはあるまい。

4. 地面抵抗 地面抵抗は普通 Slip-velocity の逆方向にありとせられるが, 既述の如く一方向に鑢目を入れた金属板にも比較すべき平行丘陵のある平地などでは, 必ずしもさうとは限るまい。但し抵抗の大きさは矢張り速度 W の二乗に比例するとせば一般には

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_x| W |u| = \mu_x \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad |f_y| W |v| = \mu_y \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \text{但し} \quad f_y/f_x \equiv m \end{array} \right\} \quad (19)$$

と置きたい。

然るときは

$$\tan \alpha_0' = \left| \frac{f_y v}{f_x u} \right|_{z=0} = \frac{f_y}{f_x} \left| \frac{v}{u} \right|_{z=0} = m \tan \alpha_0, \quad m \equiv f_y/f_x \quad (20)$$

故に(18)式は

$$\tan \beta_0 = \frac{1+n(m-1)\tan \alpha_0 + n^2 m \tan^2 \alpha_0}{n + (1-mn^2)\tan \alpha_0 + mn \tan^2 \alpha_0} \quad (18')$$

而して(19)式の f も μ も共に亂流なる同一原因によつて生ずることを考慮すれば

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{\mu_y}{\mu_x} \quad \text{或は} \quad m = \frac{1}{n^2} \quad (21)$$

とするは妥當の想定であらう。然らば

$$\left. \begin{aligned} \tan \beta_0 &= \frac{1 + \left(\frac{1}{n} - n \right) \tan \alpha_0 + \tan^2 \alpha_0}{n + \frac{1}{n} \tan^2 \alpha_0} \\ &= \frac{\sqrt{m}(1 + \tan^2 \alpha_0) + (m-1)\tan \alpha_0}{1 + m \tan^2 \alpha_0} \end{aligned} \right\} \quad (18'')$$

(18')にせよ(18'')にせよ, 等方性大氣 ($m=n=1$) では共に $\tan \beta_0 = 1$, $\beta_0 = 45^\circ$ となつて

テーラーの場合に一致することは言ふまでもない。

III. 實地への適用

前節の異方性大氣理論を榊原氏の轉載せる Lindenberg に於ける風速垂直分布に適用して見よう。同觀測表には地上 130 米, 500 米, 1000 米に於ける風速を出してあるが, 地面直上のそれは無いので, α_0 や β_0 を使つた検討は出来ない。それで, (11)式を適當に利用し(10)式の検討を行へる様に工夫する。

先づ觀測値を以て第 2 圖の様な風速分布圖を描き, 其の趨勢から地衡風 W_g を判定する。次に $z_1=130$ 米, $z_2=500$ 米での u, v, α, γ 等を測り, 夫れ夫れ Suffix 1, 2 を附して區別する。

すると(11)式より

$$\left. \begin{aligned} k(z_2-z_1) &= \frac{2.303}{2} \log_{10} \frac{(W_g-u_1)^2 + \frac{1}{n^2} v_1^2}{(W_g-u_2)^2 + \frac{1}{n^2} v_2^2} \equiv Y_1 \\ &= \cot^{-1}(n \cot \gamma_2) - \cot^{-1}(n \cot \gamma_1) \equiv Y_2 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

によつて n を決定することが出来る。勿論式の上から直接に出すことは困難であるから, n を種々に假定して Y_1 と Y_2 とを計算し, それ等を縦軸とし, n の假定値を横軸とした曲線を描き, 兩曲線の交點に當る n の値をとつて所要値とするのである。例へば第 2 圖に掲げた二例に就いては, 第 2 表及び第 3 圖の如き結果となる。

第 2 表 n の算定例

| 月 日 | n | $n^2(W_g-u_1)^2 + v_1^2$ | $n^2(W_g-u_2)^2 + v_2^2$ | Y_1 | n | $\cot^{-1}(n \cot \gamma_2)$ | $\cot^{-1}(n \cot \gamma_1)$ | Y_2 |
|-------------------|----------|--------------------------|--------------------------|-------|------|------------------------------|------------------------------|-------|
| (a) Aug. 19 | 0 | [5.75] | [0.33] | 2.85 | 0.1 | 131.3 | 81.6 | 0.87 |
| | 0.2 | 35.94 | 0.46 | 2.18 | 0.13 | 138.8 | 79.1 | 1.04 |
| | 0.32 | 40.25 | 0.99 | 1.85 | 0.2 | 150.3 | 73.5 | 1.34 |
| | 0.36 | 42.41 | 1.25 | 1.76 | 0.3 | 159.2 | 66.1 | 1.62 |
| | 1 | [10.2] | [3.0] | 1.22 | 0.4 | 164.1 | 59.4 | 1.83 |
| | ∞ | [8.48] | [2.96] | 1.05 | 1.0 | 173.5 | 34.3 | 2.43 |
| (b) Oct. 8 | 0 | [4.8] | [4.0] | 0.18 | 0.1 | 90.4 | 78.2 | 0.21 |
| | 0.1 | 24.00 | 16.01 | 0.20 | 0.2 | 90.8 | 67.4 | 0.41 |
| | 0.15 | 25.20 | 16.01 | 0.23 | 0.6 | 92.4 | 38.7 | 0.94 |
| | 1 | [10.98] | [4.1] | 0.99 | 0.76 | 93.0 | 32.3 | 1.06 |
| | ∞ | [9.81] | [0.25] | 3.67 | 1 | 94.0 | 25.7 | 1.19 |

異方性大氣及び海洋

(a) Aug. 19, 1924

(b) Oct. 8, 1924

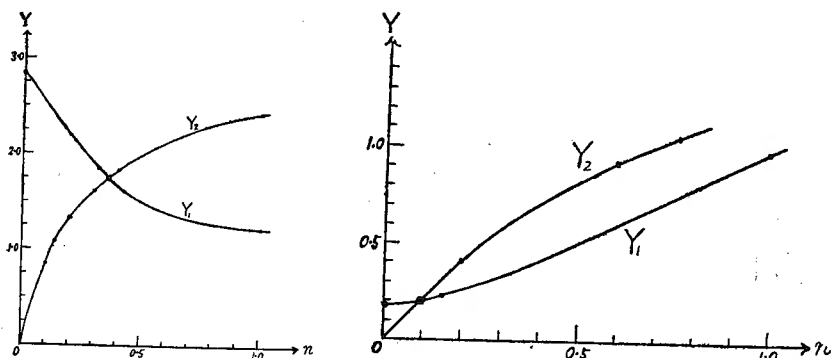
$$\gamma_1 = 34.3, \quad \gamma_2 = 173.5$$

$$\gamma_1 = 25.7, \quad \gamma_2 = 94$$

$$W_g - u_1 = 8.48 \text{ m/s}, \quad W_g - u_2 = -2.96 \text{ m/s} \quad W_g - u_1 = 9.81 \text{ m/s}, \quad W_g - u_2 = -0.25 \text{ m/s}$$

$$v_1 = 5.75 \text{ ㌥}, \quad v_2 = 0.33 \text{ ㌥} \quad v_1 = 4.8 \text{ m/s}, \quad v_2 = 4.0 \text{ m/s}$$

第3圖 n の推定例



P_1 の計算中, $n=0, 1, \infty$ の三つの場合は, 上欄指示の如きものを計算せずに v_1, v_2 ; $W_{r,1}, W_{r,2}$; $W_g - u_1, W_g - u_2$ の値を括弧内に記入した。

兎も角, 此の表で得た P_1 と P_2 とを圖示せる第3圖から, 當日の n を出せば

(a) Aug. 19 には $n=0.36$, (b) Oct. 8 には $n=0.10$

を得る。

かくして n がきまれば, (22)式にそれを入れて k も決定出来る。のみならず, (11)式からは $C e^{-kz_1}$ が出せる。夫れを(12)式に入れると $kz_1 + \epsilon$ もわかる。この $kz_1 + \epsilon$ を(14)式に入れると β が算出し得るゝのである。かくして體抵抗の方向角 $\beta(z_1=130 \text{ 米に於ける})$ を求め, n の値と共に表示したのが第3表である。

此の表を見ると, 中には β の計算値と實測値とが相當喰違つたものもあるけれども, 大抵はよく一致して居ると云つて差支ないと思ふ。然るに等方性大氣として計算すれば殆んど何れも非常な違ひを示すのである。従つて方向により粘性係数が違ふといふことは, 相當根據あることと思はれる。而して其の相違は表中の n の値が示す通り, 可なりに著しい場合が多い。

尙ほ本調査は異方性の原因が地面の状況にあるかとの豫期の下に行つたのであるが, どうも風向と地面との關係は餘り著しく現はれなかつたので, 夫れは略する。

異方性大氣及び海洋

第8表 Lindenberg に於ける n と β

| 日 附 | n | β | | 日 附 | n | β | |
|--------------|------|---------|-------|---------|------|---------|-------|
| | | 計 算 | 實 測 | | | 計 算 | 實 測 |
| 1923-Dec. 5 | 0.20 | 15.3 | 14.5 | 15 | 0.24 | 24.5 | 26.0 |
| 8 | 0.25 | -20.6 | -21.0 | July 15 | 0.13 | -7.6 | -7.3 |
| 23 | 0.24 | -6.0 | -10.5 | 19 | 0.30 | 40.5 | 40.3 |
| 1924-Jan. 10 | 0.05 | -5.0 | -3.0 | 24 | 0.10 | 8.3 | 21.5 |
| 12 | 0.40 | 12.0 | 9.5 | Aug. 19 | 0.36 | 10.1 | 9.5 |
| 20 | 0.34 | 25.5 | 26.0 | 20 | 0.22 | 15.8 | 27.5 |
| Feb. 2 | 1.55 | 32.0 | 23.0 | 31 | 0.25 | -24.6 | -24.5 |
| 5 | 2.15 | 40.8 | 40.0 | Sep. 8 | 0.20 | 40.1 | 17.8 |
| 16 | 0.14 | 32.4 | 34.0 | 16 | 1.47 | 52.8 | 20.0 |
| 21 | 0.40 | 14.8 | 20.5 | 21 | 0.04 | 11.5 | 12.0 |
| Mar. 4 | 1.58 | 18.6 | 18.7 | 22 | 0.29 | 16.5 | 16.0 |
| 23 | 0.69 | 13.8 | 14.5 | Oct. 3 | 0.18 | -5.4 | -6.0 |
| Apr. 2 | 0.16 | 32.9 | 33.5 | 8 | 0.10 | -11.2 | -11.8 |
| 17 | 0.02 | 14.6 | 14.0 | 25 | 2.45 | 39.7 | 39.0 |
| 21 | 0.03 | 21.4 | 21.0 | 31 | 0.11 | 24.6 | 24.0 |
| May 17 | 0.35 | 9.4 | 8.5 | Nov. 1 | 1.48 | -15.8 | -15.6 |
| 24 | 0.34 | -10.7 | -10.4 | 16 | 0.25 | 30.6 | 17.0 |
| 29 | 0.41 | 4.6 | 4.0 | 25 | 0.51 | -12.9 | -14.0 |
| June 8 | 1.02 | 46.1 | 45.5 | 30 | 1.66 | -10.7 | -11.0 |

IV. 異方性海洋の吹送流

異方性海洋中の傾斜流 (Slope current) は、前節に於ける地表風と數理的には全く同一で、海底を $z=0$ と見なし上方に z を取れば前節の各式がそのまま使用出来る。

次に異方性海洋中の吹送流 (Drift current) も、前節の G 従つて II_0 を 0 とした場合に大部分は一致し只表面條件が違ふばかりである。但し z は海面を原點とし下方垂直に取るが便である。即ち運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{c^2 u}{c z^2} + 2k_z^2 v \\ 0 &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - 2k_y^2 u \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

但し k_x, k_y は(6)式の示す如き量で、簡單の爲に常數と考へる。

従つて(7)式の代りに

$$0 = \frac{d^4 u}{dz^4} + 4k^4 u \quad (7')$$

$$\text{但し} \quad k = \sqrt{k_x k_y}, \quad \mu = \sqrt{\mu_x \mu_y} = n \mu_y, \quad n = k_y / k_x = \sqrt{\mu_x / \mu_y} \quad (8).$$

其の一般解は

$$u = Ce^{-kz} \cos(kz + \epsilon) + C'e^{+kz} \cos(kz + \epsilon') \quad (9')$$

特に無限深海に於ては

$$\left. \begin{aligned} u &= Ce^{-kz} \cos(kz + \epsilon) \\ \text{従つて } v &= -nCe^{-kz} \sin(kz + \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

今風の方向を y 軸とし、其の牽引力を単位面積當り T とすれば、表面條件

$$\begin{aligned} -\mu_x \left(\frac{du}{dz} \right)_{z=0} &= 0 \quad \text{より} \quad \epsilon = -45^\circ \\ -\mu_y \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=0} &= T \quad \text{より} \quad C = \frac{T}{n\sqrt{2}\mu_y k} = \frac{T}{\sqrt{2}\mu k} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{故に } u &= \frac{T}{\sqrt{2}\mu k} e^{-kz} \cos(45^\circ - kz) \\ v &= \frac{nT}{\sqrt{2}\mu k} e^{-kz} \sin(45^\circ - kz) \end{aligned} \right\} \quad (10'')$$

であつて、 $n=1$ 即ち等方性海洋では勿論 Ekman の式に歸着する。

海流の風向から右への偏角を θ 、其の表面値を θ_0 とすれば

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{n}{v} = \frac{1}{n} \cot(45^\circ - kz) = \frac{1}{n} \tan(45^\circ + kz) \\ \tan \theta_0 &= 1/n = \sqrt{\mu_y/\mu_x} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

で、 $n=1$ でない限り、表面偏角でも 45° にはならない。而して n が 1 より大なるか小なるか、換言すれば粘性係数 μ_x が μ_y より大なるか小なるかによつて、表面偏角は 45° より小となり大となる。

海流偏角問題に就いても、從來多數の學者が之を論じ、例へば Sverdrup⁽¹²⁾ は粘性係数を深さの函數として見出したが、之に類似の粘性係数を假定して日高孝次博士や櫻庭信一氏⁽¹³⁾ は、粘性が下方に増大するか減少するかによつて 45° より大とも小ともなることを論じ、更に粘性を流速の函數とした場合等をも論じて居る。然し何れにしても從來の等方性海洋論では、粘性係数の或假定下では表面偏角が常に 45° より大なるか或は小なるかの一方で

(12) Sverdrup: Ein Beiträge zur Theorie der Winderzeugten Meeresströmungen. Beitr. Geo-phys. 23 (1923)

(13) K. Hidaka: On the angle between the wind and the drift current. Mem. Imp. Mar. Obs. Kobe, 4 (1931), 241.

定常吹送流の理論に關する二つの研究. 海と空 16 (昭和 11 年), 1.
(14) 櫻庭信一: 吹送流に於ける偏角について. 海と空 15 (昭和 10 年), 1.

あつて、只數値が異なるのみによつて偏角が 45° より大とも小ともなり得るものは無い様である。

然るに異方性海洋であれば、單に二方向の粘性係數が數値を變へるだけで、表面偏角は 45° より大にも小にも成り得るのである。而して風は水面に波を起し、大體風向に直交する凹凸を生じて渦動を作り易からしめ、抵抗に異方性が現はれることは可能である。又風域は有限であるから、其縁邊では風向と側方とで著しい相異があり、海流の縁邊亦然りである。かくの如く考へると、海洋に異方性を附與する原因は多々あり、従つて事情によつて μ_x が μ_y より大きいことも小さい事もあつて然るべきものの様で、延いては表面偏角も種々變化して毫も差支ない。

結 論

以上、筆者は其の地表風論の續報として異方性大氣を考へて種々論議し、併はせて海洋の吹送流にまで及んだが、其の要點を摘記すれば次の通りである。

- 1). 先づ地面の風向 α 風速 W_0 に關するテラーの公式を一般化したる

$$W_z/W_0 = \cos \alpha - \tan \beta \sin \alpha$$

は抵抗法則の如何に拘らず、又地面直上に限らず任意の高度に於て成立することを、單なる運動法則のみによつて極めて簡単に證明せらるゝことを示した。こゝに β は空氣の單位體積が受くる所の所謂體抵抗が風向の逆方向となす角で、左廻りを正號とする。

- 2). 又、體抵抗の方向は、地衡風 W_0 に對する任意點の風速 W_z の相對風速 W_r に直角なることを示し、従つて W_0 と W_z さへ與へらるれば β は作圖によつて直ちに之を知ることが出来る様にした。而して之は粘性係數其他抵抗の法則如何には無關係であるから此の方法によつて求めた β は單なる觀測値と見做することが出来る。

- 3). 此の作圖法によつて、獨逸 Lindenberg に於ける一年間の風速觀測結果につき、日々の β を求め體抵抗の觀測方向を定めた。其の結果によると β はテラーの初めに豫期した如き 45° となる日は殆んどなく、それより大なる日も小なる日もあるが、大部分は 45° 以下で、負値となることさへ少くない。之は大に注目に値する事柄である。

- 4). β が 45° より違ひ得る理由は、從來多數の學者によつて研究されては居るが、多くは 45° より小なるか或は大なるか何れか一方に偏し得る様な假定であつて、特に負値とさ

へなり得る説明はまだ無い様である。

5). 仍つて筆者は茲に異方性大氣なるものを考ふことにした。渦動交換係数が同一點でも方向によつて違ふと考ふるのである。其の原因としては、渦動の發生が風向と之に直角な方向とでは難易があり得ること、地面は全くの平滑な平面ではなく、地形に方向性があれば自然に渦動發生も方向によつて難易があり得ること、例へば平行丘陵がある場合には其の方向と直角方向とでは渦動發生の難易があることなどを掲げ、延いては擾亂運動の混合経路の長さに差を生ずることとなるからであるとした。

6). x, y 二方向の粘性係数を μ_x, μ_y とし、其の比を n^2 として、風速の垂直分布式を作り、それによつて n や β や面摩擦抵抗及び地面抵抗の方向角を算定すべき公式をも導いた。

7). 此の理論式を Lindenberg の風速観測値に適用して、日々の n と β を算出した。 β の計算値は先きの観測値と對比して大體満足すべき一致を示した。特に β が負値の場合でもさうであることは注意に値する。

8). 従つて大氣の異方性は相當實在性を有することを論定した。

9). 地面摩擦も地形如何によつて必ずしも風向の逆とは限らぬものとして、其の方向を計算する式を作つた。

10). 海洋學に於ても、深海に於ける吹送流の風向に對する偏角が實際にはエックマン理論の如く 45° にならぬので、學者間の議論の種子になつて居るから、筆者は茲にも異方性海洋を考へ、其の場合の定常吹送流理論式を作つた。

11). 夫れによると海面の偏角 θ_0 は、

$$\tan \theta_0 = \sqrt{\mu_y / \mu_x} \quad \text{但し風向を } y \text{ 軸にとる。}$$

となつて、二方向の粘性係數如何により 45° より大にも小にもなり得ることを明かにした。